Por qué así

HANDBOOK

Matemáticas

Los 18 temas de Matemáticas en esquemas y fórmulas para el repaso final

Muestra gratuita · primeras 4 de 30 páginas

Juan Carlos del Río

Temario de Matemáticas de la oposición al Cuerpo Superior de Meteorólogos del Estado (A1)
porqueasi.com · noviembre de 2026

Material de estudio elaborado de forma independiente a partir del temario. No es material oficial del organismo convocante ni de ninguna Administración, ni está avalado por ellos. Elaborado por el autor con ayuda de herramientas de inteligencia artificial; si encuentras un error, escribe a hola@porqueasi.com.

Tema 1: Álgebra matricial y diagonalización

1. Matrices y determinantes: propiedades y operaciones elementales

1.1. Estructura y Producto de Matrices

Las matrices representan homomorfismos entre espacios vectoriales. El conjunto $M_n(\mathbb{K})$ posee estructura de álgebra asociativa y anillo no conmutativo.

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}$$

- c_{ij}: Elemento de la matriz producto $C = AB$.
- a_{ik}: Elemento de la fila i de la matriz A.
- b_{kj}: Elemento de la columna j de la matriz B.
- p: Dimensión común (columnas de A, filas de B).

1.2. Traza y Productos Especiales

- **Traza ($Tr(A)$)**: Suma de elementos de la diagonal principal. Presenta invariancia cíclica: $Tr(ABC) = Tr(BCA)$.
- **Producto de Kronecker ($A \otimes B$)**: Multiplicación de cada a_{ij} por la matriz B completa.
- **Producto de Hadamard ($A \circ B$)**: Producto entrada a entrada.

1.3. La Función Determinante

El determinante es una forma n-lineal alternada que representa el factor de escala volumétrico.

$$\det(kA) = k^n \det(A)$$

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D)$$

- k: Escalar que multiplica a la matriz.
- n: Orden de la matriz cuadrada A.
- A, D: Bloques cuadrados en una matriz triangular por bloques.

1.4. Operaciones Elementales y Complemento de Schur

- **Tipo I**: Intercambio de filas ($\det \times -1$).
- **Tipo II**: Escalamiento por λ ($\det \times \lambda$).
- **Tipo III**: Suma de fila por escalar (Preserva det).

$$\det(M) = \det(D) \cdot \det(A - BD^{-1}C)$$

- M: Matriz particionada en bloques $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.
- $A - BD^{-1}C$: Complemento de Schur de D en M.

2. Matriz inversa y rango de una matriz

2.1. Rango y Subespacios Fundamentales

El rango ($rg(A)$) es la dimensión de la imagen.

$$rg(A) + v(A) = n$$

- $rg(A)$: Rango de la matriz (columnas L.I.).
- $v(A)$: Nulidad o dimensión del núcleo (ker).
- n: Número total de columnas de la matriz.

2.2. Invertibilidad

Una matriz es regular si $\det(A) \neq 0$ o tiene rango pleno.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)^T$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

- A^{-1}: Matriz inversa.
- $\text{adj}(A)^T$: Matriz de adjuntos transpuesta (cofactores).

3. Valores y vectores propios. Polinomio característico

3.1. Ecuación Fundamental y Espectro

Los autovalores λ escalan vectores propios v sin cambiar su dirección.

$$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

- $P_A(\lambda)$: Polinomio característico de grado n.
- I: Matriz identidad.
- λ: Valores propios (raíces del polinomio).

3.2. Multiplicidades y Cayley-Hamilton

- **Multiplicidad Algebraica (m_a)**: Veces que λ es raíz de $P_A(\lambda)$.
- **Multiplicidad Geométrica (m_g)**: $\dim(\ker(A - \lambda I))$. Siempre $1 \leq m_g \leq m_a$.
- **Cayley-Hamilton**: $P_A(A) = 0$. Una matriz anula su propio polinomio característico.

4. Diagonalización de matrices

4.1. Criterios de Diagonalización

Una matriz A es diagonalizable si existe P invertible tal que $D = P^{-1}AP$.

$$A^k = PD^kP^{-1}$$

- A^k: Potencia k-ésima de la matriz.
- D^k: Matriz diagonal con λ_i^k.
- P: Matriz de paso (columnas son vectores propios).

Condiciones Necesarias y Suficientes:

1. Todas las raíces de $P_A(\lambda)$ están en el cuerpo $\mathbb{K}$.

2. $m_a(\lambda_i) = m_g(\lambda_i)$ para todo λ_i.

5. Teorema espectral para matrices reales simétricas

5.1. Propiedades de la Simetría ($A = A^T$)

- Todos los valores propios son reales.
- Los vectores propios de valores propios distintos son ortogonales.
- La matriz es siempre diagonalizable ortogonalmente.

$$A = QDQ^T = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i q_i q_i^T$$

- Q: Matriz ortogonal ($Q^{-1} = Q^T$).
- $q_i q_i^T$: Proyector ortogonal sobre el subespacio propio.

5.2. Ejemplo Clarificador (Diagonalización)

Enunciado: Diagonalizar $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

1. **Autovalores**: $\det(A - \lambda I) = -(\lambda - 5)^2(\lambda - 1) = 0 \Rightarrow \lambda = 5(m_a = 2), \lambda = 1(m_a = 1)$.

2. **Autovectores para** $\lambda = 5$: $(A - 5I)v = 0 \Rightarrow -2x - 2y = 0 \Rightarrow v_1 = (-1, 1, 0)^T, v_2 = (0, 0, 1)^T$. $(m_g = 2)$.

3. **Autovectores para** $\lambda = 1$: $(A - I)v = 0 \Rightarrow z = 0, x = y \Rightarrow v_3 = (1, 1, 0)^T$.

4. **Resultado**: $P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

5.3. Trucos para el Examen y Reglas de Memoria

- **Suma y Producto**: $\sum \lambda_i = Tr(A)$ y $\prod \lambda_i = \det(A)$. Úsalo para verificar autovalores rápido.
- **El error del escalar**: No olvides que $\det(2A) = 2^n \det(A)$. Si $n = 3$, es $8\det(A)$.
- **Inversa de producto**: Regla del "abrigo y zapatos": $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. Al deshacer, lo último que se puso es lo primero que se quita.
- **Matrices simétricas**: Si la matriz es simétrica, no pierdas tiempo buscando si es diagonalizable; **siempre** lo es.

Esquema

- **Operaciones**: El producto de matrices es la composición de aplicaciones; no es conmutativo.
- **Determinantes**: Único funcional multilineal alternado; $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
- **Rango**: Máximo número de filas/columnas L.I.; $rg(A) = rg(A^T)$.
- **Invertibilidad**: A es invertible ssi $\det(A) \neq 0$ ssi $rg(A) = n$.
- **Espectro**: Los autovalores son raíces de $\det(A - \lambda I) = 0$; la traza es su suma.
- **Diagonalización**: Requiere que $m_a = m_g$ para cada autovalor.
- **Simetría**: $A = A^T$ garantiza autovalores reales y diagonalización ortogonal.

Tema 2: Sistemas de ecuaciones lineales

6. Representación matricial de sistemas lineales

6.1. Definición y Estructura

Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas se compacta en una única entidad algebraica.

$$Ax = b$$

- $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$: Matriz de coeficientes del sistema.
- $x \in \mathbb{K}^n$: Vector columna de las incógnitas $(x_1, \ldots, x_n)$.
- $b \in \mathbb{K}^m$: Vector de términos independientes o fuente.

6.2. Perspectivas de Interpretación

- **Filas (Geométrica):** Cada ecuación es un hiperplano en $\mathbb{K}^n$. La solución es la intersección de m hiperplanos.
- **Columnas (Combinación Lineal):** El sistema busca escalares x_j tales que $\sum x_j v_j = b$, donde v_j son columnas de A. Solo hay solución si $b \in Im(A)$.
- **Operador Lineal:** A es una aplicación $L : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$. Resolver es hallar la preimagen de b.

6.3. Morfología y Almacenamiento

- **Densa:** Mayoría de elementos no nulos ($O(n^3)$).
- **Dispersa (Sparse):** Mayoría de ceros. Se usan formatos CSR/CSC para eficiencia.
- **Bloques:** Partición de A para computación paralela o complementos de Schur.

6.4. Matriz Ampliada y Rango

La matriz $A^* = [A|b]$ contiene toda la información. La consistencia depende de la relación entre $rg(A)$ y $rg(A^*)$.

6.4.1. Ejemplo Clarificador: Red de Fluidos

En una red de 4 nodos (filas) y 5 tuberías (columnas/incógnitas), la matriz de incidencia A determina el balance de masa. Si $rg(A) = 3$ y $n = 5$, existen $5 - 3 = 2$ grados de libertad (circulaciones internas).

Truco de Examen

Para calcular el rango rápidamente, busca filas proporcionales o combinaciones lineales evidentes antes de empezar Gauss. Si la suma de todas las filas de la matriz aumentada da 0 y b no suma 0, el sistema es incompatible.

7. Método de Gauss y regla de Cramer

7.1. Método de Eliminación de Gauss

Transforma el sistema en uno triangular superior ($Ux = c$) mediante Operaciones Elementales de Fila (OEF).

- **Pivoteo Parcial:** Intercambiar filas para usar el mayor coeficiente como pivote. Minimiza errores de redondeo.
- **Complejidad:** $O(n^3)$ en la fase de eliminación; $O(n^2)$ en sustitución regresiva.

7.2. Regla de Cramer

Proporciona una solución analítica mediante determinantes para matrices cuadradas no singulares ($\det(A) \neq 0$).

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

- x_i: Valor de la incógnita i-ésima.
- $\det(A)$: Determinante de la matriz de coeficientes.
- $\det(A_i)$: Determinante de la matriz A sustituyendo su columna i por el vector b.

7.2.1. Ejercicio: Análisis de Nodo de Red

Enunciado: Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5 \\ 4x_1 + 4x_2 - 3x_3 = 3 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \end{cases}$$

Resolución: Mediante Gauss con pivoteo parcial, se intercambia $F_1 \leftrightarrow F_2$ para usar el 4 como pivote. Tras eliminar y sustituir, se obtiene $x = [1, 2, 3]^T$.

Regla de Memoria

Gauss es para Hacer, Cramer es para Saber. Usa Cramer solo si $n \leq 3$ o si hay parámetros (letras) en el examen. Para números grandes, Gauss es siempre más rápido.

8. Teorema de Rouché-Fröbenius

8.1. Clasificación de Sistemas

Establece la existencia y unicidad de soluciones comparando el rango de la matriz de coeficientes (r) y la aumentada (r^*).

- $r \neq r^* \implies$ **SI** (Sistema Incompatible).
- $r = r^* = n \implies$ **SCD** (Compatible Determinado).
- $r = r^* < n \implies$ **SCI** (Compatible Indeterminado).
- r: Rango de la matriz A.
- r^*: Rango de la matriz aumentada $[A|b]$.
- n: Número de incógnitas.

8.2. Sistemas Homogéneos ($Ax = 0$)

- Siempre son **compatibles** (la solución trivial $x = 0$ siempre existe).
- Tienen soluciones no triviales si $rg(A) < n$.

Truco de Examen

Si en un sistema con parámetros el determinante de A es distinto de 0, no pierdas tiempo con la aumentada: es SCD. Solo analiza A^* cuando $\det(A) = 0$.

9. Métodos iterativos: Jacobi y Gauss-Seidel

9.1. Fundamento de la Iteración

Se basa en el desdoblamiento (splitting) $A = M - N$. La iteración sigue el esquema: $x^{(k+1)} = M^{-1}Nx^{(k)} + M^{-1}b$.

9.2. Algoritmos Principales

- **Jacobi ($M = D$):** Utiliza solo valores de la iteración anterior (k).
- **Gauss-Seidel ($M = D - L$):** Utiliza los valores ya actualizados de la iteración presente ($k + 1$).

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j \neq i} a_{ij} x_j \right)$$

- a_{ii}: Elemento de la diagonal principal.
- x_j: Valores en iteración k (Jacobi) o mezcla de k y $k + 1$ (Gauss-Seidel).

9.3. Convergencia

Un sistema converge si el radio espectral de la matriz de iteración $\rho(T) < 1$. **Condición suficiente:** Matriz Estrictamente Diagonal Dominante (EDD): $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$.

Esquema de Guía Oral

- **Representación:** Entender el sistema como $Ax = b$ (transformación entre espacios).
- **Gauss:** Algoritmo estándar $O(n^3)$ que usa OEF para triangularizar la matriz.
- **Cramer:** Útil para sistemas simbólicos o pequeños; usa cocientes de determinantes.
- **Rouché-Fröbenius:** Regla de oro para clasificar según el rango de A y $[A|b]$.
- **SCD vs SCI:** Unicidad (rango máximo) frente a infinitas soluciones (rango deficitario).
- **Métodos Iterativos:** Jacobi y Gauss-Seidel para sistemas gigantes y dispersos.
- **Convergencia:** Vital comprobar la Dominancia Diagonal para asegurar el éxito del método.

Tema 3: Cálculo en varias variables

10. Límites, continuidad y derivadas parciales

10.1. Fundamentos Topológicos en $\mathbb{R}^n$

El estudio de funciones multivariables requiere definir la estructura del espacio métrico mediante la norma euclídea.

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

- $\|\mathbf{x}\|$: Norma euclídea (longitud del vector).
- x_i: Componentes del vector en $\mathbb{R}^n$.

- **Bola abierta:** $B(\mathbf{a}, r) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < r\}$. Entorno fundamental para límites.
- **Punto de acumulación:** Aquel donde toda bola abierta centrada en él contiene puntos del dominio distintos al propio punto.
- **Conjunto compacto:** Conjunto cerrado y acotado. Crucial para asegurar la existencia de extremos (Teorema de Weierstrass).

10.2. Límites y Continuidad

Un límite en $\mathbb{R}^n$ existe si el valor es independiente de la trayectoria de aproximación.

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = L \iff \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : 0 < \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\| < \delta \implies |f(\mathbf{x}) - L| < \epsilon$$

- $\mathbf{x} \to \mathbf{a}$: Aproximación vectorial al punto $\mathbf{a}$.
- L: Valor real del límite.
- δ: Radio del entorno en el dominio.
- ϵ: Margen de error en la imagen.

10.2.1. Técnicas de cálculo y trayectorias

- **Límites radiales:** Trayectorias $y - a_2 = m(x - a_1)$. Si el resultado depende de m, el límite no existe.
- **Límites reiterados:** $\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y))$. Su igualdad es necesaria pero no suficiente para la existencia del límite doble.
- **Coordenadas polares:** Sustituir $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$. El límite existe si el resultado es independiente de θ cuando $r \to 0$.

10.3. Derivadas Parciales y Teorema de Schwarz

Representan la tasa de cambio respecto a una sola variable.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{a}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_i + h, \ldots, a_n) - f(\mathbf{a})}{h}$$

- $\frac{\partial f}{\partial x_i}$: Derivada parcial respecto a la componente i.
- h: Incremento escalar en la dirección del eje coordenado.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{a})$$

- **Teorema de Schwarz:** Garantiza la igualdad de derivadas mixtas si estas son continuas en un entorno de $\mathbf{a}$.

- **Ejemplo clave:** Para la función $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4+y^2}$, los límites radiales ($y = mx$) dan 0, pero la trayectoria parabólica $y = x^2$ da $1/2$. Esto demuestra que la existencia de derivadas parciales no implica continuidad.
- **Truco de examen:** Para demostrar que un límite no existe, busca siempre una trayectoria que iguale los grados del numerador y denominador (ej. si tienes x^4 y y^2, prueba $y = x^2$).

11. Diferenciabilidad y regla de la cadena

11.1. Diferenciabilidad de Fréchet

Una función es diferenciable si admite una aproximación lineal óptima (plano tangente).

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - \mathbf{f}(\mathbf{a}) - J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})\mathbf{h}\|}{\|\mathbf{h}\|} = 0$$

- $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})$: Matriz Jacobiana de la función en el punto $\mathbf{a}$.
- $\mathbf{h}$: Vector de incremento.
- $J_{\mathbf{f}}(\mathbf{a})\mathbf{h}$: Transformación lineal que aproxima el incremento de la función.

11.2. Regla de la Cadena (Forma Matricial)

Útil para cambios de coordenadas y sistemas compuestos.

$$J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}(\mathbf{a}) = J_{\mathbf{f}}(\mathbf{g}(\mathbf{a})) \cdot J_{\mathbf{g}}(\mathbf{a})$$

- $J_{\mathbf{f}\circ\mathbf{g}}$: Jacobiana de la composición.
- $(\cdot)$: Producto matricial estándar.

- **Regla mnemotécnica:** La jerarquía de regularidad es $C^1 \implies$ Diferenciable $\implies$ Continua $\implies$ Existen derivadas parciales. Los saltos hacia atrás requieren condiciones extra.
- **Truco de examen:** Si te piden la derivada de una función $f(x(t), y(t))$, usa siempre el producto escalar: $\frac{df}{dt} = \nabla f \cdot \mathbf{r}'(t)$.