Por qué así

LIBRO DE LA ASIGNATURA

Introducción a la Astronomía

Coordenadas, movimientos celestes y medida del tiempo

Muestra gratuita · primeras 15 de 208 páginas

Juan Carlos del Río
Asignatura de 4.º del Grado en Matemáticas (UNED)
porqueasi.com · noviembre de 2026

Material de estudio elaborado de forma independiente a partir del temario. No es material oficial de la universidad ni está avalado por ella. Elaborado por el autor con ayuda de herramientas de inteligencia artificial; si encuentras un error, escribe a hola@porqueasi.com.

Índice

1 Coordenadas astronómicas **7**

1 La esfera celeste y la trigonometría esférica . . . 7
- 1.1 La esfera celeste como esfera de radio unidad . . . 7
- 1.2 El triángulo esférico: lados, ángulos y propiedades básicas . . . 8
- 1.3 Las fórmulas fundamentales: coseno, seno y cotangentes . . . 10
- 1.4 Analogías de Gauss–Delambre y de Napier; triángulos rectángulos . . . 11
- 1.5 Ejemplos numéricos . . . 13
- 1.6 Estudio de un caso: resolución completa con ambigüedad de cuadrante . . . 14

2 Coordenadas horizontales, horarias y ecuatoriales . . . 17
- 2.1 Coordenadas horizontales: lo que ve el observador . . . 17
- 2.2 Coordenadas horarias y ecuatoriales: lo que gira y lo que no . . . 18
- 2.3 La altura del polo es la latitud . . . 19
- 2.4 El triángulo de posición y las fórmulas de paso . . . 19
- 2.5 Culminaciones: paso por el meridiano . . . 22
- 2.6 Estrellas circumpolares, visibles e invisibles . . . 23
- 2.7 Estudio de un caso: una observación completa desde Calar Alto . . . 24

3 Coordenadas eclípticas y galácticas; transformaciones . . . 27
- 3.1 La eclíptica y las coordenadas eclípticas . . . 27
- 3.2 Transformación entre coordenadas ecuatoriales y eclípticas por trigonometría esférica 27
- 3.3 El enfoque matricial: vectores unitarios y matrices de rotación . . . 30
- 3.4 Coordenadas galácticas . . . 32
- 3.5 Cuadro sinóptico de los cinco sistemas . . . 33
- 3.6 Estudio de un caso: el centro galáctico en los cinco sistemas mediante la cadena matricial . . . 33

4 Orto, ocaso, culminación y crepúsculos . . . 36
- 4.1 La condición de orto y ocaso . . . 37
- 4.2 Altura de las culminaciones y astros circumpolares . . . 38
- 4.3 Duración del día y casos límite: sol de medianoche y noche polar . . . 39
- 4.4 Del ángulo horario a la hora del reloj . . . 39
- 4.5 Los crepúsculos . . . 41
- 4.6 El caso de la Luna . . . 43
- 4.7 Cuadro sinóptico . . . 43
- 4.8 Estudio de un caso: la noche de Sirio en Madrid . . . 43

2 Movimientos planetarios **47**

1 El problema de los dos cuerpos y las leyes de Kepler . . . 47
- 1.1 De Tycho a Newton: cómo se descubrieron las leyes . . . 47
- 1.2 Enunciado de las leyes de Kepler y ley de gravitación . . . 47
- 1.3 El problema de los dos cuerpos: reducción al movimiento relativo . . . 48
- 1.4 Integral del momento angular y ley de las áreas . . . 48
- 1.5 La integral de la energía y el vector de Laplace–Runge–Lenz . . . 50
- 1.6 La ecuación de la órbita: primera ley de Kepler . . . 50
- 1.7 La tercera ley de Kepler . . . 51
- 1.8 La ecuación de la fuerza viva y la clasificación energética . . . 51
- 1.9 Ejemplos resueltos . . . 52
- 1.10 Estudio de un caso: una transferencia de Hohmann de la Tierra a Marte . . . 53

2 Elementos orbitales y la ecuación de Kepler . . . 55
2.1 Los seis elementos orbitales . . . 55
2.2 Las tres anomalías . . . 57
2.3 La ecuación de Kepler . . . 58
2.4 Métodos de resolución . . . 59
2.5 De los elementos a la posición en el espacio . . . 61
2.6 El problema inverso: elementos a partir de posición y velocidad . . . 62
2.7 Estudio de un caso: posición heliocéntrica del cometa Encke . . . 63
3 Órbitas elípticas, parabólicas e hiperbólicas; efemérides . . . 66
3.1 Clasificación de las órbitas por la excentricidad y la energía . . . 66
3.2 La órbita parabólica y la ecuación de Barker . . . 68
3.3 La órbita hiperbólica: anomalía hiperbólica y ecuación de Kepler hiperbólica . . . 69
3.4 Cuadro comparativo de las tres cónicas . . . 71
3.5 Efemérides: de los elementos orbitales a la ascensión recta y la declinación . . . 71
3.6 Estudio de un caso: efemérides simplificadas de Marte el 16 de enero de 2025 . . . 72
4 Estrellas binarias y exoplanetas . . . 76
4.1 Tipos de estrellas binarias . . . 76
4.2 Órbita relativa y órbitas absolutas . . . 77
4.3 La órbita aparente de una binaria visual . . . 77
4.4 Constantes de Thiele–Innes . . . 78
4.5 Determinación de la masa total . . . 79
4.6 Binarias espectroscópicas: la curva de velocidad radial . . . 80
4.7 La función de masas . . . 81
4.8 Exoplanetas por velocidad radial: la masa mínima . . . 82
4.9 Exoplanetas por tránsitos . . . 82
4.10 Astrometría de binarias y de exoplanetas . . . 84
4.11 Estudio de un caso: efemérides de Sirio B para 2026,0 . . . 84

3 Movimientos geocéntricos en el sistema solar 89
1 Movimiento aparente del Sol: eclíptica y estaciones . . . 89
1.1 El Sol sobre la eclíptica: equinoccios y solsticios . . . 89
1.2 Coordenadas ecuatoriales del Sol . . . 90
1.3 Longitud media, anomalía media y ecuación del centro . . . 91
1.4 La desigualdad de las estaciones . . . 92
1.5 Altura meridiana del Sol; trópicos y círculos polares . . . 93
1.6 El analema . . . 95
1.7 Estudio de un caso: el Sol del 7 de septiembre de 2026 . . . 95
2 Configuraciones planetarias y movimiento retrógrado . . . 98
2.1 Planetas interiores y exteriores; elongación y configuraciones . . . 99
2.2 Periodo sidéreo y periodo sinódico . . . 100
2.3 Distancia geocéntrica, fases y brillo . . . 101
2.4 El movimiento retrógrado y la condición de estacionariedad . . . 102
2.5 Ptolomeo frente a Copérnico . . . 105
2.6 Estudio de un caso: la oposición de Marte de enero de 2025 . . . 105
3 Movimiento de la Luna: fases y libraciones . . . 108
3.1 La órbita de la Luna: elementos, nodos y movimientos seculares . . . 109
3.2 Los cinco meses lunares . . . 110
3.3 Fases, edad de la Luna y fracción iluminada . . . 111
3.4 Rotación síncrona y libraciones . . . 113
3.5 El retraso diario del orto lunar y la Luna de cosecha . . . 114
3.6 Las mareas . . . 116
4 Eclipses de Sol y de Luna . . . 118
4.1 Geometría de las sombras: umbra y penumbra . . . 118
4.2 Radio angular de la sombra terrestre . . . 119
4.3 Por qué no hay eclipse cada mes: los límites eclípticos . . . 120
4.4 Tipos de eclipse solar; anularidad, magnitud y duración . . . 122
4.5 Eclipses de Luna: tipos, magnitud y duración . . . 123
4.6 Estaciones de eclipses, año de eclipses y número de eclipses . . . 123

4.7 Periodicidades: el Saros y el ciclo de Metón . . . 124
4.8 Estudio de un caso: una temporada de eclipses completa . . . 125

4 El tiempo y su medida **129**
1 Tiempo sidéreo y tiempo solar; ecuación del tiempo . . . 129
1.1 El día sidéreo y el tiempo sidéreo local . . . 129
1.2 Tiempo sidéreo de Greenwich y longitud geográfica . . . 130
1.3 Cálculo del tiempo sidéreo de Greenwich . . . 131
1.4 El tiempo solar verdadero y sus irregularidades . . . 132
1.5 El Sol medio y la ecuación del tiempo . . . 132
1.6 Día solar medio y día sidéreo . . . 134
1.7 Estudio de un caso: una jornada de observación en Calar Alto . . . 135
1.8 Cuadro sinóptico . . . 136
2 Tiempo universal, husos horarios y hora oficial . . . 138
2.1 Hora civil local y meridiano de Greenwich . . . 138
2.2 UT0, UT1 y UT2: las tres versiones del Tiempo Universal . . . 139
2.3 Husos horarios . . . 139
2.4 Hora oficial, hora de verano y anomalías . . . 140
2.5 La fórmula general de conversión . . . 141
2.6 La línea de cambio de fecha y la hora en los polos . . . 142
2.7 El mediodía solar de Madrid a lo largo del año . . . 143
2.8 Estudio de un caso: coordinación de una campaña solar desde el Observatorio del Teide . . . 144
2.9 Cuadro sinóptico de las escalas de la sección . . . 145
3 Escalas uniformes: TAI, TT, TDB y segundos intercalares . . . 147
3.1 Por qué la rotación de la Tierra no sirve como patrón . . . 147
3.2 El tiempo de efemérides y el segundo SI . . . 147
3.3 TAI: el Tiempo Atómico Internacional . . . 148
3.4 UTC y los segundos intercalares . . . 148
3.5 TT y la cantidad ΔT . . . 149
3.6 La ley parabólica de ΔT . . . 150
3.7 ΔT y los eclipses antiguos . . . 151
3.8 TDB, TCG y TCB: el tiempo en relatividad . . . 151
3.9 Ejemplos resueltos . . . 153
3.10 Estudio de un caso: un eclipse total en Córdoba hacia el año 1000 . . . 154
4 Calendarios y fecha juliana . . . 157
4.1 Los distintos años del astrónomo . . . 157
4.2 El calendario juliano y su deriva . . . 158
4.3 La reforma gregoriana . . . 159
4.4 Calendarios lunares y lunisolares: el ciclo de Metón . . . 160
4.5 El cómputo de la Pascua . . . 160
4.6 La fecha juliana . . . 161
4.7 Del calendario a la fecha juliana y viceversa . . . 162
4.8 Día de la semana y siglos julianos . . . 163
4.9 Estudio de un caso: de Colón al Apolo 11 . . . 164

5 Corrección de coordenadas **169**
1 Refracción atmosférica . . . 169
1.1 La ley de Snell y el modelo de atmósfera plano-paralela . . . 169
1.2 La constante de refracción y su dependencia de las condiciones meteorológicas . . . 171
1.3 Un modelo mejorado: el término cúbico y la curvatura terrestre . . . 171
1.4 Refracción cerca del horizonte y fórmulas empíricas . . . 172
1.5 Efectos observables de la refracción . . . 173
1.6 Efecto de la refracción sobre las coordenadas ecuatoriales . . . 174
1.7 Estudio de un caso: el ocaso del Sol en Madrid . . . 176
2 Paralaje diurna y anual . . . 179
2.1 El concepto de paralaje . . . 179
2.2 Paralaje diurna: geometría básica y paralaje horizontal . . . 179
2.3 La forma de la Tierra: latitud geocéntrica y coordenadas del observador . . . 180

2.4 Corrección de coordenadas ecuatoriales: de geocéntricas a topocéntricas 181
2.5 La paralaje solar y la unidad astronómica 182
2.6 Paralaje anual: la elipse paraláctica 182
2.7 El pársec, la distancia y el módulo de distancia 184
2.8 Historia y precisión: de Bessel a Gaia 185
2.9 Cuadro sinóptico 185
2.10 Estudio de un caso: la escala del sistema solar por paralaje diurna de Marte 186
3 Aberración de la luz 188
3.1 El descubrimiento de Bradley: una paralaje que llegaba con tres meses de retraso . 188
3.2 Explicación clásica: composición de velocidades 189
3.3 Deducción relativista y comparación con la clásica 190
3.4 La constante de aberración 191
3.5 Aberración anual: la elipse de aberración 192
3.6 Aberración anual en coordenadas ecuatoriales: números de Bessel 193
3.7 Aberración diurna 194
3.8 Aberración planetaria y corrección por tiempo luz 194
3.9 Aberración secular 195
3.10 Estudio de un caso: reconstrucción de las observaciones de Bradley 195
4 Precesión, nutación y movimiento propio 198
4.1 La precesión luni-solar: la Tierra como giróscopo 198
4.2 Precesión planetaria y precesión general; consecuencias 200
4.3 Fórmulas de precesión en coordenadas ecuatoriales 200
4.4 Precesión rigurosa: la matriz de rotación 202
4.5 Nutación 203
4.6 Posiciones medias, verdaderas y aparentes; épocas y equinoccios 204
4.7 Movimiento propio 205
4.8 La reducción completa de una posición 205

Capítulo 1

Coordenadas astronómicas

1 La esfera celeste y la trigonometría esférica

Cuando levantamos la vista en una noche despejada, las estrellas parecen fijadas sobre una bóveda que gira lentamente en torno a nosotros. No percibimos sus distancias, solo sus *direcciones*: la astronomía de posición nace de esta observación elemental. Los antiguos, desde Hiparco (siglo II a. C.) hasta Ptolomeo, entendieron que para describir el cielo bastaba con estudiar la geometría de las direcciones, es decir, la geometría sobre una esfera. Menelao de Alejandría (c. 100 d. C.) escribió el primer tratado sistemático de trigonometría esférica, y los astrónomos del mundo islámico (al-Battani, Abu al-Wafa, al-Biruni) obtuvieron las fórmulas que hoy usamos para resolver triángulos esféricos. Esta sección, la primera del libro, construye la herramienta común a todo lo que sigue: la esfera celeste como modelo geométrico y la trigonometría esférica como cálculo sobre ella. Todo lo que aparece en los capítulos posteriores (sistemas de coordenadas, movimientos aparentes, orto y ocaso, eclipses, reducción de posiciones) se apoya en un puñado de fórmulas que aquí deducimos con detalle. El estudiante debe salir de esta sección sabiendo dos cosas: *qué* es un triángulo esférico y *cómo* resolverlo numéricamente sin ambigüedades.

1.1 La esfera celeste como esfera de radio unidad

La idea básica es sustituir cada astro por su dirección. Desde el observador, situado en el centro O, trazamos la semirrecta que apunta hacia el astro y consideramos su intersección con una esfera de centro O y radio 1. De este modo, cada dirección del espacio corresponde a un único punto de la esfera, y viceversa.

Definición 1.1 (Esfera celeste)**.** Se llama *esfera celeste* a la esfera de radio unidad centrada en el observador O. A cada astro se le asocia el punto de la esfera celeste en el que la corta la semirrecta que va de O hacia el astro. Un punto de la esfera celeste se identifica con un vector unitario $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3$, $|\mathbf{u}| = 1$.

El radio unidad no es una restricción, sino una simplificación deliberada: como solo nos interesan direcciones, la distancia real al astro es irrelevante y toda la geometría queda descrita por vectores unitarios. Dos observadores situados en puntos distintos de la Tierra ven, en primera aproximación, la misma esfera celeste, porque las distancias estelares son enormemente mayores que las terrestres (las correcciones a esta idealización, paralaje y aberración, se tratan en las Secciones 5.2 y 5.3).

Sobre la esfera hay dos tipos de circunferencias que conviene distinguir desde el principio.

Definición 1.2 (Círculos máximos y menores)**.** Un *círculo máximo* es la intersección de la esfera celeste con un plano que pasa por su centro O; su radio es 1. Un *círculo menor* es la intersección con un plano que no pasa por O; su radio es $\cos\theta < 1$, donde θ es la distancia angular del círculo a su polo. Los dos puntos de la esfera situados sobre la recta perpendicular al plano de un círculo por O se llaman *polos* de dicho círculo.

Los círculos máximos desempeñan en la esfera el papel de las rectas en el plano: por dos puntos no diametralmente opuestos pasa un único círculo máximo, y el arco menor de dicho círculo es el camino más corto entre ellos (geodésica). Dos círculos máximos distintos se cortan siempre en dos puntos diametralmente opuestos; no existen "paralelas" en la esfera. Esta diferencia con la geometría euclídea es la raíz de todas las peculiaridades que veremos.

Definición 1.3 (Distancia angular)**.** La *distancia angular* (o distancia esférica) entre dos puntos P_1, P_2 de la esfera celeste, con vectores unitarios $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$, es el ángulo $d \in [0, \pi]$ que forman en el centro:

$$\cos d = \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{u}_2.$$

Coincide con la longitud del arco menor del círculo máximo que los une.

Sobre la esfera celeste el observador dispone de dos direcciones físicas privilegiadas: la vertical del lugar (dada por la plomada) y el eje de rotación de la Tierra. Cada una de ellas define un círculo máximo fundamental y un par de polos.

Definición 1.4 (Elementos fundamentales de la esfera celeste)**.**

- *Cénit* Z y *nadir* Z': puntos en que la vertical del lugar corta la esfera celeste, hacia arriba y hacia abajo respectivamente.
- *Horizonte* (astronómico o matemático): círculo máximo cuyo polo es el cénit; su plano es perpendicular a la vertical.
- *Polos celestes* P (norte) y P' (sur): puntos en que la prolongación del eje de rotación terrestre corta la esfera celeste.
- *Ecuador celeste*: círculo máximo cuyo polo es P; es la intersección de la esfera con el plano del ecuador terrestre trasladado al observador.
- *Meridiano del lugar*: círculo máximo que pasa por el cénit y por el polo celeste. Corta al horizonte en los *puntos cardinales* norte N (el más próximo a P) y sur S.
- *Verticales*: círculos máximos que pasan por Z y Z'. El *primer vertical* es el perpendicular al meridiano; corta al horizonte en los puntos cardinales este E y oeste W.

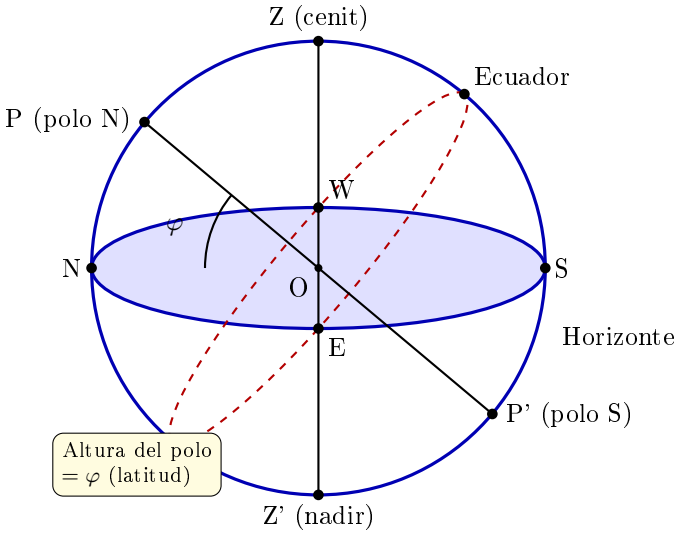


Figura 1.1: Esfera celeste vista desde fuera. El horizonte (elipse sombreada) tiene por polo el cenit Z; el ecuador celeste (elipse discontinua) tiene por polo P. El meridiano del lugar es el círculo exterior, que pasa por Z, P, N y S. La altura del polo sobre el horizonte, arco NP, es igual a la latitud del observador.

La figura anterior muestra la disposición relativa de los dos círculos fundamentales. Como el eje de rotación de la Tierra forma con la vertical del lugar un ángulo igual a la colatitud $90° - \varphi$, el polo celeste P se ve a una altura φ sobre el punto cardinal norte, y el ecuador celeste corta al meridiano a una altura $90° - \varphi$ sobre el punto sur. Esta relación, que aquí es puramente geométrica, se convierte en la Sección 1.2 en la base de los sistemas de coordenadas horizontales y ecuatoriales; aquí nos limitamos a la geometría de la esfera y de sus arcos.

1.2 El triángulo esférico: lados, ángulos y propiedades básicas

Definición 1.5 (Triángulo esférico)**.** Dados tres puntos A, B, C de la esfera de radio unidad, no situados en un mismo círculo máximo, se llama *triángulo esférico* ABC a la región limitada por los tres arcos menores de círculo máximo que los unen. Sus *lados* a, b, c son las longitudes de los arcos BC, CA, AB

(opuestos respectivamente a A, B, C), y como la esfera tiene radio unidad, coinciden con los ángulos centrales que subtienden: $a = \angle BOC$, etc. Sus *ángulos* A, B, C son los ángulos diedros formados por los planos de los círculos máximos que concurren en cada vértice; equivalentemente, el ángulo entre las tangentes a los dos arcos en el vértice. Los seis elementos verifican $0 < a, b, c < \pi$ y $0 < A, B, C < \pi$.

Nótese la peculiaridad esencial: en un triángulo esférico *los seis elementos son ángulos*. Un lado de 30° es un arco cuya longitud, en una esfera de radio R, sería $R \cdot 30 \cdot \pi/180$. Esta es la razón de que, sobre la esfera de radio unidad, hablemos indistintamente de la "longitud" de un lado y de su "medida angular".

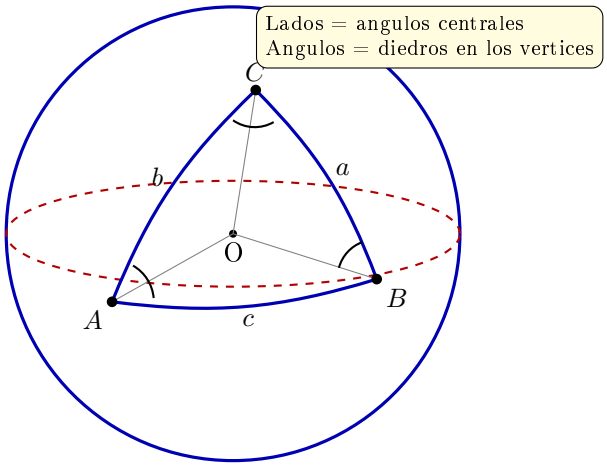


Figura 1.2: Triángulo esférico ABC sobre la esfera celeste. Los lados a, b, c son arcos de círculo máximo, medidos por el ángulo central que subtienden desde O; los ángulos A, B, C son los diedros entre los planos de los círculos máximos que se cortan en cada vértice.

La figura anterior resume la notación que usaremos en todo el libro: vértices en mayúscula, lados opuestos en la minúscula correspondiente. Algunas propiedades elementales, que se demuestran considerando el triedro de vértice O y aristas OA, OB, OC, son:

Propiedades 1.6.
1. Cada lado es menor que la suma de los otros dos (desigualdad triangular): $a < b + c$, y análogas.
2. La suma de los tres lados es menor que 2π: $a + b + c < 2\pi$.
3. La suma de los tres ángulos está comprendida entre π y 3π: $\pi < A + B + C < 3\pi$.
4. A mayor lado se opone mayor ángulo, y recíprocamente.

La propiedad 3 es la que más sorprende a quien viene de la geometría plana. La cantidad en que la suma de los ángulos supera a π tiene un nombre propio y un significado geométrico preciso.

Definición 1.7 (Exceso esférico)**.** Se llama *exceso esférico* del triángulo ABC a la cantidad $E = A + B + C - \pi$, expresada en radianes. Por la propiedad anterior, $0 < E < 2\pi$.

Teorema 1.8 (Fórmula de Girard, 1626)**.** *El área de un triángulo esférico sobre la esfera de radio unidad es igual a su exceso esférico:*

$$\mathcal{A}(ABC) = A + B + C - \pi = E.$$

Sobre una esfera de radio R, el área es $R^2 E$.

Demostración 1.9. Llamamos *huso* de ángulo α a la región de la esfera comprendida entre dos semicírculos máximos que se cortan en dos puntos antípodas formando un ángulo diedro α. El área de un huso es proporcional a su ángulo, y el huso de ángulo 2π es toda la esfera, de área 4π; luego el huso de ángulo α tiene área 2α.

Sean A', B', C' los puntos antípodas de A, B, C, y T' el triángulo $A'B'C'$, simétrico de $T = ABC$ respecto del centro (y por tanto de igual área). Los dos círculos máximos que pasan por A determinan dos husos de ángulo A: el que contiene a T, que llamamos H_A, y su antípoda H'_A, que contiene a T'. Definimos análogamente H_B, H'_B, H_C, H'_C. Estos seis husos recubren toda la esfera: en efecto, los tres círculos máximos dividen la esfera en ocho triángulos, y cada uno de ellos está en alguno de los husos. Ahora bien, el recubrimiento no es simple: el triángulo T está contenido en H_A, H_B y H_C (tres veces), el triángulo T' está contenido en H'_A, H'_B y H'_C (tres veces), y cada uno de los seis triángulos restantes está

contenido exactamente en un huso. Sumando las áreas de los seis husos contamos, pues, toda la esfera una vez más dos veces adicionales T y dos veces adicionales T':

$$2A + 2A + 2B + 2B + 2C + 2C = 4\pi + 2\,\mathcal{A}(T) + 2\,\mathcal{A}(T') = 4\pi + 4\,\mathcal{A}(T).$$

Despejando, $\mathcal{A}(T) = A + B + C - \pi$. Para una esfera de radio R todas las áreas se multiplican por R^2.

Lectura operativa: la fórmula de Girard convierte un cálculo de área (una integral de superficie) en una simple suma de ángulos, y muestra que el exceso esférico *mide el tamaño* del triángulo: un triángulo muy pequeño respecto al radio es casi plano ($E \approx 0$) y su área se aproxima a la del triángulo plano de los mismos lados. En el examen la fórmula se usa de dos modos: directamente, cuando se conocen los tres ángulos, o tras resolver el triángulo (calcular los ángulos a partir de los lados) cuando se conocen los lados. Recuérdese siempre que E debe estar en *radianes* para que R^2E tenga unidades de área. No afirma nada sobre polígonos en general, aunque se extiende trivialmente a ellos triangulando: un polígono esférico de n lados tiene área igual a la suma de sus ángulos menos $(n-2)\pi$.

Cuando se conocen los lados y no los ángulos, es útil la fórmula de l'Huilier, que damos sin demostración (es el análogo esférico de la fórmula de Herón): con $s = (a+b+c)/2$,

$$\tan\frac{E}{4} = \sqrt{\tan\frac{s}{2}\,\tan\frac{s-a}{2}\,\tan\frac{s-b}{2}\,\tan\frac{s-c}{2}}.$$

1.3 Las fórmulas fundamentales: coseno, seno y cotangentes

Pasamos ahora al cálculo. La herramienta más limpia para deducir las relaciones entre los seis elementos de un triángulo esférico es el álgebra vectorial: cada vértice es un vector unitario y los lados son ángulos entre vectores.

Teorema 1.10 (Fórmula del coseno o teorema de al-Battani)**.** *En todo triángulo esférico se verifica*

$$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A,$$

y las dos relaciones análogas obtenidas por permutación circular:

$$\cos b = \cos c\cos a + \sin c\sin a\cos B, \qquad \cos c = \cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C.$$

Demostración 1.11. Elegimos un sistema de referencia ortonormal con origen en el centro O de la esfera adaptado al vértice A: el eje z en la dirección de A, y el plano xz conteniendo al vértice B (con $x_B > 0$). En estas condiciones, como el arco AB mide c y el arco AC mide b, los tres vértices tienen coordenadas

$$\mathbf{a} = (0,0,1), \qquad \mathbf{b} = (\sin c,\, 0,\, \cos c), \qquad \mathbf{c} = (\sin b\cos A,\, \sin b\sin A,\, \cos b).$$

En efecto, $\mathbf{b}$ forma con el eje z un ángulo c y está en el plano xz; $\mathbf{c}$ forma con el eje z un ángulo b, y el ángulo diedro entre el plano $z\mathbf{b}$ (que es el xz) y el plano $z\mathbf{c}$ es precisamente el ángulo A del triángulo, de modo que la proyección de $\mathbf{c}$ sobre el plano xy, de módulo $\sin b$, forma ángulo A con el eje x.

El lado a es el ángulo entre $\mathbf{b}$ y $\mathbf{c}$; por definición de distancia angular,

$$\cos a = \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} = \sin c\sin b\cos A + 0 + \cos c\cos b,$$

que es la fórmula buscada. Las otras dos se obtienen repitiendo el argumento con el sistema de referencia adaptado a B o a C, o simplemente renombrando cíclicamente los vértices.

Lectura operativa: la fórmula del coseno relaciona *tres lados y un ángulo*. Permite calcular un lado a partir de los otros dos y del ángulo comprendido (caso "lado-ángulo-lado"), o un ángulo a partir de los tres lados ("lado-lado-lado"). Su gran ventaja es que *no tiene ambigüedad*: la función arccos es inyectiva en $[0,\pi]$, que es justamente el rango de lados y ángulos. Su inconveniente es la pérdida de precisión cuando el resultado está próximo a $0°$ o a $180°$, donde el coseno varía muy lentamente. Es la fórmula que da la distancia angular entre dos astros y que aparece en casi todas las transformaciones de coordenadas de la Sección 1.3.

Teorema 1.12 (Fórmula del seno)**.** *En todo triángulo esférico,*

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B} = \frac{\sin c}{\sin C}.$$

Demostración 1.13. Con el sistema de referencia de la demostración anterior calculamos el producto mixto de los tres vértices:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \sin c & 0 & \cos c \\ \sin b\cos A & \sin b\sin A & \cos b \end{pmatrix} = \sin c\,\sin b\,\sin A.$$

El producto mixto es invariante por permutaciones circulares de sus argumentos, $[\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}] = [\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}] = [\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}]$, y su valor no depende del sistema de referencia elegido. Repitiendo el cálculo con el sistema adaptado a B y a C obtenemos, pues,

$$\sin b\sin c\sin A = \sin c\sin a\sin B = \sin a\sin b\sin C.$$

Dividiendo por $\sin a\sin b\sin c \neq 0$ resulta la fórmula del seno.

Lectura operativa: la fórmula del seno relaciona *dos lados y sus dos ángulos opuestos*. Es muy cómoda y numéricamente precisa cerca de 0° y 180° (donde el coseno falla), pero tiene un defecto grave: al despejar con arcsin se obtienen dos soluciones, x y $180°-x$, y la fórmula por sí sola *no dice cuál es la correcta*. Como veremos en el estudio de caso, la práctica segura consiste en combinarla con otra fórmula que proporcione el coseno del elemento buscado.

Teorema 1.14 (Fórmula de las cotangentes o de los cinco elementos)**.** *Para cuatro elementos consecutivos de un triángulo esférico (lado, ángulo, lado, ángulo), llamando* interiores *a los dos centrales y* exteriores *a los dos extremos, se verifica*

$$\cos(\textit{lado int.})\cos(\textit{angulo int.}) = \sin(\textit{lado int.})\cot(\textit{lado ext.}) - \sin(\textit{angulo int.})\cot(\textit{angulo ext.}).$$

Por ejemplo, para los elementos consecutivos a, C, b, A:

$$\cos b\cos C = \sin b\cot a - \sin C\cot A.$$

Demostración 1.15. Partimos de la fórmula del coseno para a y sustituimos en ella la fórmula del coseno para c:

$$\cos a = \cos b\,(\cos a\cos b + \sin a\sin b\cos C) + \sin b\sin c\cos A.$$

Agrupando los términos en $\cos a$,

$$\cos a\,(1-\cos^2 b) = \cos a\sin^2 b = \cos b\sin a\sin b\cos C + \sin b\sin c\cos A,$$

y dividiendo por $\sin a\sin b$:

$$\cot a\sin b = \cos b\cos C + \frac{\sin c}{\sin a}\cos A.$$

Por la fórmula del seno, $\sin c/\sin a = \sin C/\sin A$, de modo que el último término es $\sin C\cot A$. Reordenando se obtiene $\cos b\cos C = \sin b\cot a - \sin C\cot A$. Las restantes cinco relaciones análogas (hay seis en total) se obtienen por permutación de los elementos.

Lectura operativa: la fórmula de las cotangentes relaciona *dos lados y dos ángulos consecutivos*, es decir, permite calcular un ángulo conocidos dos lados y el ángulo comprendido *sin pasar por el tercer lado*. Como proporciona la cotangente, cuyo signo determina el cuadrante, es la alternativa natural a la fórmula del seno para resolver ambigüedades. Es la fórmula que da directamente el acimut en las transformaciones de coordenadas y en los problemas de navegación.

1.4 Analogías de Gauss–Delambre y de Napier; triángulos rectángulos

Las tres fórmulas anteriores bastan para resolver cualquier triángulo. Antes de las calculadoras, sin embargo, las operaciones de sumar y restar eran incómodas con logaritmos y se desarrollaron fórmulas "puramente multiplicativas" que además tienen la virtud de servir como *comprobación* de un cálculo. Las enunciamos sin demostración.

Proposición 1.16 (Analogías de Delambre o de Gauss)**.**

$$\sin\tfrac{A+B}{2}\,\cos\tfrac{c}{2} = \cos\tfrac{a-b}{2}\,\cos\tfrac{C}{2}, \quad \sin\tfrac{A-B}{2}\,\sin\tfrac{c}{2} = \sin\tfrac{a-b}{2}\,\cos\tfrac{C}{2},$$
$$\cos\tfrac{A+B}{2}\,\cos\tfrac{c}{2} = \cos\tfrac{a+b}{2}\,\sin\tfrac{C}{2}, \quad \cos\tfrac{A-B}{2}\,\sin\tfrac{c}{2} = \sin\tfrac{a+b}{2}\,\sin\tfrac{C}{2}.$$

Proposición 1.17 (Analogías de Napier)**.**

$$\tan\tfrac{A+B}{2} = \frac{\cos\frac{a-b}{2}}{\cos\frac{a+b}{2}}\cot\tfrac{C}{2}, \qquad \tan\tfrac{A-B}{2} = \frac{\sin\frac{a-b}{2}}{\sin\frac{a+b}{2}}\cot\tfrac{C}{2},$$
$$\tan\tfrac{a+b}{2} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}}\tan\tfrac{c}{2}, \qquad \tan\tfrac{a-b}{2} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}}\tan\tfrac{c}{2}.$$

Las analogías de Napier se obtienen dividiendo las de Delambre entre sí, y estas últimas se deducen de la fórmula del coseno tras una manipulación con las fórmulas del ángulo mitad. Su uso típico es el caso "lado-ángulo-lado": conocidos a, b, C, las dos primeras analogías de Napier dan $A+B$ y $A-B$ (y por tanto A y B sin ambigüedad alguna, porque la tangente determina el ángulo en $(-90°, 90°)$ y las semisumas y semidiferencias de ángulos están en ese rango o en el adyacente de forma controlada), y luego la fórmula del seno da c.

Un caso particular de enorme importancia en astronomía es el triángulo con un ángulo recto: aparece cada vez que un círculo máximo se corta perpendicularmente con otro (meridiano y ecuador, vertical y horizonte, etc.). Si $C = 90°$, las fórmulas generales se simplifican y Napier las condensó en una regla mnemotécnica.

Proposición 1.18 (Regla de Napier para triángulos rectángulos)**.** *Sea ABC un triángulo esférico con $C = 90°$. Se disponen en un círculo, en este orden, los cinco elementos a, b, $\overline{A}$, $\overline{c}$, $\overline{B}$, donde la barra indica el complementario ($\overline{A} = 90° - A$, etc.). Entonces, para cada elemento tomado como* central*:*

- *el seno del elemento central es igual al producto de las tangentes de los dos elementos* adyacentes*;*
- *el seno del elemento central es igual al producto de los cosenos de los dos elementos* opuestos*.*

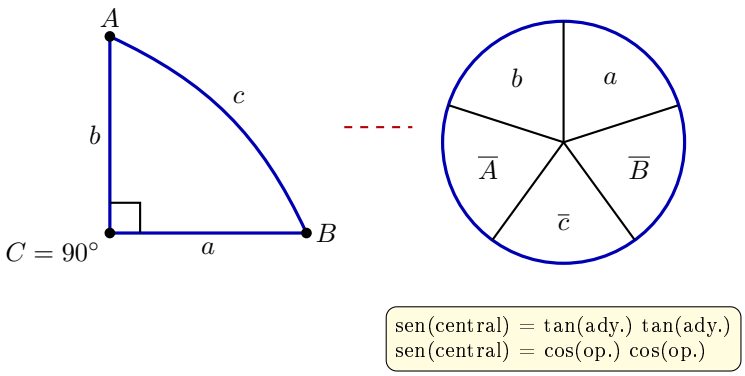


Figura 1.3: Triángulo esférico rectángulo (C = 90 grados) y círculo de Napier con las cinco partes circulares a, b, co-A, co-c, co-B. Tomando cualquier parte como central, su seno es el producto de las tangentes de las partes adyacentes y también el producto de los cosenos de las partes opuestas.

La figura anterior muestra el círculo de Napier. Por ejemplo, tomando $\overline{c}$ como parte central, sus opuestas son a y b, y la regla de los cosenos da $\sin\overline{c} = \cos a\cos b$, es decir, $\cos c = \cos a\cos b$ (el "teorema de Pitágoras esférico", que se obtiene también de la fórmula del coseno con $C = 90°$). Tomando a como central, sus adyacentes son b y $\overline{B}$, luego $\sin a = \tan b\tan\overline{B} = \tan b\cot B$; y sus opuestas son $\overline{c}$ y $\overline{A}$, luego $\sin a = \cos\overline{c}\cos\overline{A} = \sin c\sin A$, que no es sino la fórmula del seno. Las diez relaciones que se obtienen así resuelven cualquier triángulo rectángulo conocidos dos elementos además del ángulo recto.

A modo de comparación sistemática entre la geometría plana y la esférica:

Propiedad	**Triangulo plano**	**Triangulo esferico**
Suma de angulos	π exactamente	$\pi + E$, con $0 < E < 2\pi$
Area	$\frac{1}{2}bc\sin A$	R^2E (Girard)
Teorema del coseno	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$	$\cos a = \cos b\cos c + \sin b\sin c\cos A$
Teorema del seno	$a/\sin A = b/\sin B$	$\sin a/\sin A = \sin b/\sin B$
Pitagoras ($C = 90°$)	$c^2 = a^2 + b^2$	$\cos c = \cos a\cos b$
Semejanza	Existe (AAA no determina)	No existe (AAA determina)

La última fila merece un comentario: en la esfera, tres ángulos determinan el triángulo (por la fórmula del coseno del triángulo polar, $\cos A = -\cos B\cos C + \sin B\sin C\cos a$), de modo que no hay triángulos esféricos semejantes no congruentes. Y cuando los lados son muy pequeños respecto al radio, desarrollando en serie $\cos x \approx 1 - x^2/2$ y $\sin x \approx x$, la fórmula esférica del coseno se reduce a la plana: la geometría plana es el límite de la esférica para triángulos pequeños.

1.5 Ejemplos numéricos

Ejemplo 1.19 (Distancia angular entre Sirio y Betelgeuse)**.** Las posiciones de dos estrellas se especifican, como se verá formalmente en la Sección 1.2, mediante dos ángulos: la *declinación* δ, distancia angular al ecuador celeste (positiva hacia el polo norte), y la *ascensión recta* α, ángulo medido a lo largo del ecuador. Para lo que aquí necesitamos basta saber que la distancia de una estrella al polo norte celeste P es $90^\circ - \delta$ y que el ángulo en P entre los círculos máximos que van de P a dos estrellas es la diferencia de sus ascensiones rectas. Datos (época J2000): Sirio, $\alpha_1 = 6^{\mathrm{h}}45^{\mathrm{m}}$, $\delta_1 = -16^\circ 43'$; Betelgeuse, $\alpha_2 = 5^{\mathrm{h}}55^{\mathrm{m}}$, $\delta_2 = +7^\circ 24'$.

Paso 1: identificar el triángulo. Consideramos el triángulo PS_1S_2 de vértices el polo y las dos estrellas. Sus lados son $PS_1 = 90^\circ - \delta_1 = 106^\circ 43' = 106{,}72^\circ$ y $PS_2 = 90^\circ - \delta_2 = 82^\circ 36' = 82{,}60^\circ$, y el ángulo en P es $\Delta\alpha = \alpha_1 - \alpha_2 = 0^{\mathrm{h}}50^{\mathrm{m}} = 12{,}50^\circ$ (recordando que $1^{\mathrm{h}} = 15^\circ$). El lado buscado es $d = S_1S_2$.

Paso 2: fórmula del coseno. Con $\cos(90^\circ - \delta) = \sin\delta$ y $\sin(90^\circ - \delta) = \cos\delta$,

$$\cos d = \sin\delta_1\sin\delta_2 + \cos\delta_1\cos\delta_2\cos\Delta\alpha.$$

Numéricamente: $\sin(-16{,}72^\circ) = -0{,}2877$, $\sin 7{,}40^\circ = 0{,}1288$, $\cos(-16{,}72^\circ) = 0{,}9577$, $\cos 7{,}40^\circ = 0{,}9917$, $\cos 12{,}50^\circ = 0{,}9763$. Entonces

$$\cos d = (-0{,}2877)(0{,}1288) + (0{,}9577)(0{,}9917)(0{,}9763) = -0{,}0371 + 0{,}9272 = 0{,}8901.$$

Paso 3: resultado. $d = \arccos 0{,}8901 = 27{,}1^\circ \approx 27^\circ 07'$. No hay ambigüedad porque $d \in [0, \pi]$. Sirio y Betelgeuse, dos de las estrellas más brillantes del cielo invernal, distan por tanto unos 27°: algo más que la anchura de una mano abierta con el brazo extendido ($\approx 20^\circ$).

Ejemplo 1.20 (Área de un triángulo esférico equilátero)**.** Calcular el área del triángulo esférico de lados $a = b = c = 60^\circ$ sobre la esfera unidad y sobre la superficie terrestre ($R = 6371$ km).

Paso 1: ángulos por la fórmula del coseno. Por simetría $A = B = C$, y

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b\cos c}{\sin b\sin c} = \frac{0{,}5 - 0{,}25}{0{,}75} = \frac{1}{3}, \qquad A = 70{,}53^\circ.$$

Paso 2: exceso esférico. $E = 3 \cdot 70{,}53^\circ - 180^\circ = 31{,}59^\circ$, que en radianes es $E = 31{,}59 \cdot \pi/180 = 0{,}5513$ rad.

Paso 3: área. Sobre la esfera unidad, $\mathcal{A} = E = 0{,}5513$ (estereorradianes, es decir, el $0{,}5513/(4\pi) = 4{,}4\%$ de la esfera). Sobre la Tierra, $\mathcal{A} = R^2E = (6371)^2 \cdot 0{,}5513 = 2{,}24 \cdot 10^7$ km^2, más de cuarenta veces la superficie de España.

Paso 4: comprobación con l'Huilier. $s = 90^\circ$, $\tan(s/2) = 1$, $\tan((s-a)/2) = \tan 15^\circ = 0{,}2679$, luego $\tan(E/4) = \sqrt{0{,}2679^3} = \sqrt{0{,}01924} = 0{,}1387$, $E/4 = 7{,}897^\circ$ y $E = 31{,}59^\circ$. Coincide.

Ejemplo 1.21 (Distancia ortodrómica Madrid–Nueva York)**.** Sobre la Tierra esférica ($R = 6371$ km) la distancia más corta entre dos puntos es el arco de círculo máximo u *ortodrómica*. Madrid: $\varphi_1 = 40{,}42^\circ$ N, $\lambda_1 = 3{,}70^\circ$ W. Nueva York: $\varphi_2 = 40{,}71^\circ$ N, $\lambda_2 = 74{,}01^\circ$ W.

Paso 1: triángulo polar. Tomamos el triángulo formado por el polo norte terrestre P, Madrid M y Nueva York Y. Los lados son las colatitudes $PM = 90^\circ - \varphi_1 = 49{,}58^\circ$, $PY = 90^\circ - \varphi_2 = 49{,}29^\circ$, y el ángulo en P es la diferencia de longitudes $\Delta\lambda = 70{,}31^\circ$.

Paso 2: distancia por la fórmula del coseno.

$$\begin{aligned}\cos d &= \sin\varphi_1\sin\varphi_2 + \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\Delta\lambda \\ &= (0{,}6484)(0{,}6523) + (0{,}7613)(0{,}7579)(0{,}3370) = 0{,}4230 + 0{,}1944 = 0{,}6174,\end{aligned}$$

luego $d = 51{,}87^\circ = 0{,}9053$ rad y la distancia es $D = R\,d = 6371 \cdot 0{,}9053 = 5768$ km.

Paso 3: rumbo inicial. El ángulo M del triángulo es el rumbo con el que hay que salir de Madrid, contado desde el norte hacia el oeste. Por la fórmula del seno, $\sin M = \cos\varphi_2 \sin\Delta\lambda / \sin d = (0{,}7579)(0{,}9415)/0{,}7867 = 0{,}9071$, que da $M = 65{,}1°$ o bien $M = 114{,}9°$. Para decidir usamos la fórmula del coseno aplicada al lado PY:

$$\cos M = \frac{\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1 \cos d}{\cos\varphi_1 \sin d} = \frac{0{,}6523 - (0{,}6484)(0{,}6174)}{(0{,}7613)(0{,}7867)} = \frac{0{,}2520}{0{,}5989} = 0{,}4208 > 0,$$

así que $M = 65{,}1°$: el avión sale de Madrid con rumbo N 65° W, claramente al norte del oeste, aunque el destino esté casi a la misma latitud.

Paso 4: comparación con el paralelo. Viajar a lo largo del paralelo 40,5° supondría recorrer un arco de círculo menor de longitud $R\cos\varphi\,\Delta\lambda = 6371 \cdot 0{,}760 \cdot 1{,}2271 = 5940$ km, unos 170 km más. Por eso las rutas transatlánticas se arquean hacia el norte.

1.6 Estudio de un caso: resolución completa con ambigüedad de cuadrante

Un examen típico pide resolver completamente un triángulo esférico, y el error más frecuente es aceptar sin crítica la solución del arcoseno. Analizamos el caso "lado-ángulo-lado" con datos $b = 80°$, $c = 120°$, $A = 70°$, y pedimos a, B y C.

Paso 1: el lado a (sin ambigüedad). Fórmula del coseno:

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos 80° \cos 120° + \sin 80° \sin 120° \cos 70° \\ &= (0{,}1736)(-0{,}5) + (0{,}9848)(0{,}8660)(0{,}3420) = -0{,}0868 + 0{,}2917 = 0{,}2049,\end{aligned}$$

luego $a = 78{,}18°$ y $\sin a = 0{,}9788$.

Paso 2: el ángulo B por la fórmula del seno. $\sin B = \sin b \sin A / \sin a = (0{,}9848)(0{,}9397)/0{,}9788 = 0{,}9455$, de donde $B = 70{,}99°$ o $B = 109{,}01°$.

Paso 3: el ángulo C por la fórmula del seno. $\sin C = \sin c \sin A / \sin a = (0{,}8660)(0{,}9397)/0{,}9788 = 0{,}8314$, de donde $C = 56{,}25°$ o $C = 123{,}75°$.

Paso 4: resolver las ambigüedades con la fórmula del coseno. Calculamos el coseno de cada ángulo a partir de los tres lados:

$$\cos B = \frac{\cos b - \cos a \cos c}{\sin a \sin c} = \frac{0{,}1736 - (0{,}2049)(-0{,}5)}{(0{,}9788)(0{,}8660)} = \frac{0{,}2761}{0{,}8476} = 0{,}3257 > 0,$$

$$\cos C = \frac{\cos c - \cos a \cos b}{\sin a \sin b} = \frac{-0{,}5 - (0{,}2049)(0{,}1736)}{(0{,}9788)(0{,}9848)} = \frac{-0{,}5356}{0{,}9639} = -0{,}5556 < 0.$$

Por tanto B está en el primer cuadrante y C en el segundo. La forma más limpia de expresar esta decisión es mediante la función de dos argumentos

$$B = \operatorname{atan2}(\sin B, \cos B) = \operatorname{atan2}(0{,}9455,\, 0{,}3257) = 70{,}99°, \qquad C = \operatorname{atan2}(0{,}8314,\, -0{,}5556) = 123{,}76°,$$

que devuelve el ángulo en $(-180°, 180°]$ con el cuadrante correcto. Obsérvese que la elección ingenua $C = 56{,}25°$ habría sido *errónea*.

Paso 5: verificación por la fórmula de las cotangentes. Para C, con los elementos consecutivos C, b, A, c:

$$\cot C = \frac{\sin b \cot c - \cos b \cos A}{\sin A} = \frac{(0{,}9848)(-0{,}5774) - (0{,}1736)(0{,}3420)}{0{,}9397} = \frac{-0{,}6280}{0{,}9397} = -0{,}6683,$$

y $\operatorname{arccot}(-0{,}6683) = 180° - 56{,}24° = 123{,}76°$. Confirmado sin necesidad de conocer a.

Paso 6: comprobación global con una analogía de Napier.

$$\tan\frac{B+C}{2} = \frac{\cos\frac{b-c}{2}}{\cos\frac{b+c}{2}} \cot\frac{A}{2} = \frac{\cos(-20°)}{\cos 100°} \cot 35° = \frac{0{,}9397}{-0{,}1736} \cdot 1{,}4281 = -7{,}728,$$

luego $(B+C)/2 = 97{,}37°$ (segundo cuadrante, porque la tangente es negativa y $B + C < 360°$), es decir, $B + C = 194{,}75°$, que coincide con $70{,}99° + 123{,}76° = 194{,}75°$. El triángulo queda resuelto: $a = 78{,}18°$, $B = 70{,}99°$, $C = 123{,}76°$, con exceso $E = 84{,}75° = 1{,}479$ rad.

La lección metodológica es clara: *nunca* se cierra un elemento obtenido por arcoseno sin calcular independientemente su coseno (o su cotangente); en la práctica, se calculan seno y coseno y se aplica atan2.

Formula	Elementos que liga	Uso tipico	Dimension analitica
Coseno	3 lados + 1 angulo	LAL, LLL; distancias	arccos: sin ambiguedad; impreciso cerca de 0 y π
Seno	2 lados + 2 angulos opuestos	Segundo paso tras LAL	arcsin: dos soluciones; preciso cerca de 0 y π
Cotangentes	4 elementos consecutivos	Angulo sin el tercer lado; acimut	arccot: fija el cuadrante
Napier (analogias)	Semisumas y semidiferencias	Comprobacion; LAL sin ambiguedad	Tangentes: resolucion en $(-\pi/2, \pi/2)$
Girard	Los 3 angulos	Area	Suma lineal; E en radianes

Nota 1.22 (Errores típicos y confusiones frecuentes).

- Olvidar que los lados son ángulos. Un lado de 60° no mide 60 unidades; sobre una esfera de radio R mide $R\pi/3$.
- Aceptar la primera solución del arcoseno. La fórmula del seno da siempre dos candidatos, x y $180^\circ - x$; hay que decidir con el coseno o la cotangente.
- Mezclar horas y grados. Las ascensiones rectas suelen darse en horas: $1^{\mathrm{h}} = 15^\circ$, $1^{\mathrm{m}} = 15'$, $1^{\mathrm{s}} = 15''$. Un ángulo en P de $0^{\mathrm{h}}50^{\mathrm{m}}$ son $12{,}5^\circ$, no $0{,}83^\circ$.
- Usar el exceso en grados en la fórmula de Girard. El área R^2E exige E en radianes.
- Confundir la distancia a lo largo de un paralelo (círculo menor) con la distancia más corta (círculo máximo). La primera es siempre mayor, salvo en el ecuador.
- Calcular con la fórmula del coseno un ángulo muy pequeño: si $\cos d = 0{,}99998$, un redondeo a cuatro decimales cambia d en varios minutos de arco. Para distancias pequeñas conviene la fórmula del seno o la variante del semiverseno (véase la nota de ampliación).

Nota 1.23 (Ampliación: curvatura y estabilidad numérica). Fuera del temario, conviene saber que la fórmula de Girard es un caso particular del teorema de Gauss–Bonnet: en una superficie de curvatura gaussiana constante K, un triángulo geodésico verifica $A+B+C-\pi = K\cdot\mathcal{A}$. Para la esfera de radio R, $K = 1/R^2$; para el plano, $K = 0$ (suma exactamente π); para el plano hiperbólico, $K < 0$ y la suma es *menor* que π. La trigonometría hiperbólica se obtiene de la esférica sustituyendo sin y cos de los lados por sinh y cosh: $\cosh a = \cosh b\cosh c - \sinh b\sinh c\cos A$. En cuanto al cálculo numérico, la forma estable de la fórmula del coseno para distancias pequeñas es la del semiverseno: con $\mathrm{hav}(x) = \sin^2(x/2)$,

$$\mathrm{hav}(d) = \mathrm{hav}(\delta_2 - \delta_1) + \cos\delta_1\cos\delta_2\,\mathrm{hav}(\Delta\alpha),$$

que no sufre cancelación cuando $d \to 0$ y que es la que implementan los programas de efemérides.

Resumen 1.24. La esfera celeste es la esfera de radio unidad centrada en el observador; los astros se representan por vectores unitarios y las distancias angulares por $\cos d = \mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2$. Los círculos máximos hacen el papel de rectas; los fundamentales son el horizonte (polo: cénit) y el ecuador celeste (polo: polo celeste), unidos por el meridiano del lugar. Un triángulo esférico tiene seis elementos, todos angulares; sus ángulos suman más de π, y el exceso es el área (Girard). Tres fórmulas resuelven cualquier triángulo: coseno (tres lados y un ángulo, sin ambigüedad), seno (dos lados y sus opuestos, ambigua) y cotangentes (cuatro consecutivos, fija el cuadrante). Las analogías de Napier y Delambre sirven de comprobación, y la regla de Napier condensa los triángulos rectángulos. Regla de oro: todo ángulo obtenido por arcoseno se confirma con su coseno, es decir, se usa atan2.

Ejercicios 1.25.

1. **Distancia angular Vega–Altair.** Vega: $\alpha_1 = 18^{\mathrm{h}}36{,}9^{\mathrm{m}}$, $\delta_1 = +38^\circ 47'$. Altair: $\alpha_2 = 19^{\mathrm{h}}50{,}8^{\mathrm{m}}$, $\delta_2 = +8^\circ 52'$. Calcular la distancia angular entre ambas.

   Solución 1.26. $\Delta\alpha = 1^{\mathrm{h}}13{,}9^{\mathrm{m}} = 73{,}9^{\mathrm{m}}\cdot 15'/1^{\mathrm{m}} = 1108{,}5' = 18{,}47^\circ$. $\delta_1 = 38{,}78^\circ$, $\delta_2 = 8{,}87^\circ$. Entonces

$$\begin{aligned}\cos d &= \sin 38{,}78^\circ\sin 8{,}87^\circ + \cos 38{,}78^\circ\cos 8{,}87^\circ\cos 18{,}47^\circ\\ &= (0{,}6264)(0{,}1542) + (0{,}7795)(0{,}9880)(0{,}9485) = 0{,}0966 + 0{,}7305 = 0{,}8271,\end{aligned}$$

   y $d = \arccos 0{,}8271 = 34{,}2^\circ$. Vega y Altair, dos vértices del triángulo de verano, distan unos 34°.

2. **Triángulo rectángulo.** En un triángulo esférico con $C = 90^\circ$ se conocen $a = 40^\circ$ y $b = 60^\circ$. Hallar c, A y B mediante la regla de Napier y comprobar con la fórmula del seno.

   Solución 1.27. Parte central $\overline{c}$, opuestas a y b: $\cos c = \cos 40^\circ\cos 60^\circ = (0{,}7660)(0{,}5) = 0{,}3830$, luego $c = 67{,}48^\circ$. Parte central a, adyacentes b y $\overline{B}$: $\sin a = \tan b\cot B$, es decir, $\tan B = \tan b/\sin a = 1{,}7321/0{,}6428 = 2{,}6946$, $B = 69{,}63^\circ$. Parte central b, adyacentes a y $\overline{A}$: $\tan A = \tan a/\sin b = 0{,}8391/0{,}8660 = 0{,}9689$, $A = 44{,}10^\circ$. En un triángulo rectángulo los catetos y sus ángulos opuestos son menores que 90° simultáneamente, así que no hay ambigüedad. Comprobación: $\sin c\sin A = (0{,}9238)(0{,}6959) = 0{,}6429 \approx \sin a = 0{,}6428$.

3. **Un triángulo casi plano.** Calcular, con la fórmula de l'Huilier, el exceso esférico de un triángulo equilátero de lado 1° y compararlo con el área del triángulo plano equilátero de lado $\pi/180$. Expresar E en segundos de arco.
Solución 1.28. $s = 1{,}5^\circ$, $s/2 = 0{,}75^\circ$, $(s-a)/2 = 0{,}25^\circ$. $\tan 0{,}75^\circ = 0{,}013091$, $\tan 0{,}25^\circ = 0{,}0043634$, luego $\tan(E/4) = \sqrt{0{,}013091 \cdot (0{,}0043634)^3} = \sqrt{1{,}0876 \cdot 10^{-9}} = 3{,}298 \cdot 10^{-5}$ y $E = 4 \cdot 3{,}298 \cdot 10^{-5} = 1{,}319 \cdot 10^{-4}$ rad. En segundos de arco, $E = 1{,}319 \cdot 10^{-4} \cdot 206265'' = 27{,}2''$. El triángulo plano de lado $\ell = \pi/180 = 0{,}017453$ tiene área $\frac{\sqrt{3}}{4}\ell^2 = 0{,}4330 \cdot 3{,}0462 \cdot 10^{-4} = 1{,}319 \cdot 10^{-4}$. La coincidencia hasta la cuarta cifra ilustra que el exceso esférico, y por tanto el área de Girard, tiende al área plana para triángulos pequeños; la diferencia relativa es del orden de $\ell^2/8 \approx 4 \cdot 10^{-5}$.

4. **Deducción de la fórmula del seno a partir de la del coseno.** Demostrar la fórmula del seno sin recurrir al producto mixto, partiendo únicamente de la fórmula del coseno.
Solución 1.29. De $\cos A = (\cos a - \cos b \cos c)/(\sin b \sin c)$ se obtiene

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}.$$

Desarrollando el numerador con $\sin^2 b \sin^2 c = (1-\cos^2 b)(1-\cos^2 c)$:

$$N = 1 - \cos^2 a - \cos^2 b - \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c,$$

expresión simétrica en a, b, c. Por tanto

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{N}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c},$$

y el segundo miembro es invariante bajo cualquier permutación de a, b, c; luego $\sin^2 A/\sin^2 a = \sin^2 B/\sin^2 b = \sin^2 C/\sin^2 c$. Como todos los senos son positivos en $(0, \pi)$, se toman raíces positivas y resulta la fórmula del seno. Nótese que $N = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]^2$ es el cuadrado del producto mixto, lo que enlaza con la demostración vectorial.

5. **Triángulo polar.** Dado el triángulo ABC, se llama triángulo polar $A'B'C'$ al que tiene por vértices los polos de los lados de ABC situados en el mismo hemisferio que el vértice opuesto (A' es el polo de BC del lado de A, etc.). Demostrar que $a' = \pi - A$ y $A' = \pi - a$, y deducir la *fórmula del coseno para los ángulos*: $\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a$.
Solución 1.30. Los puntos B' y C' son los polos de CA y de AB, es decir, los vectores unitarios normales a los planos OCA y OAB: $\mathbf{b}' = \pm(\mathbf{c}\times\mathbf{a})/\sin b$, $\mathbf{c}' = \pm(\mathbf{a}\times\mathbf{b})/\sin c$, con los signos elegidos para que $\mathbf{b}'\cdot\mathbf{b} > 0$ y $\mathbf{c}'\cdot\mathbf{c} > 0$. El ángulo A es el diedro entre los planos OAB y OAC, es decir, el ángulo entre sus normales o su suplementario según la orientación; un análisis de los signos (el arco $B'C'$ "rodea" al vértice A por el exterior) muestra que la distancia angular entre $\mathbf{b}'$ y $\mathbf{c}'$ es $a' = \pi - A$. Por simetría de la relación de polaridad, el polar del polar es el propio triángulo, y aplicando el resultado a $A'B'C'$ resulta $a = \pi - A'$, o sea, $A' = \pi - a$. Escribiendo ahora la fórmula del coseno en el triángulo polar,

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A',$$

y sustituyendo $a' = \pi - A$, $b' = \pi - B$, $c' = \pi - C$, $A' = \pi - a$:

$$-\cos A = \cos B \cos C - \sin B \sin C \cos a,$$

que es la fórmula pedida. Esta relación resuelve el caso "ángulo-lado-ángulo" y demuestra que tres ángulos determinan los lados.

6. **Distancia entre dos observatorios.** Calcular la distancia ortodrómica entre el Observatorio del Roque de los Muchachos (La Palma, $\varphi_1 = 28{,}76^\circ$ N, $\lambda_1 = 17{,}89^\circ$ W) y el Observatorio de Calar Alto (Almería, $\varphi_2 = 37{,}22^\circ$ N, $\lambda_2 = 2{,}55^\circ$ W), con $R = 6371$ km.
Solución 1.31. $\Delta\lambda = 15{,}34^\circ$. Fórmula del coseno en el triángulo polo–La Palma–Calar Alto:

$$\begin{aligned}\cos d &= \sin 28{,}76^\circ \sin 37{,}22^\circ + \cos 28{,}76^\circ \cos 37{,}22^\circ \cos 15{,}34^\circ \\ &= (0{,}4811)(0{,}6048) + (0{,}8767)(0{,}7964)(0{,}9644) = 0{,}2910 + 0{,}6733 = 0{,}9643,\end{aligned}$$

luego $d = 15{,}37^\circ = 0{,}2683$ rad y $D = 6371 \cdot 0{,}2683 = 1709$ km. Obsérvese que $\cos d$ está cerca de 1 y las cuatro cifras decimales limitan la precisión a unos $\pm 0{,}02^\circ$, es decir, ± 2 km: en un cálculo de precisión se usaría la fórmula del semiverseno.