Por qué así

EXÁMENES RESUELTOS

Introducción a la Astronomía

Los exámenes de 2014 a 2026 resueltos y explicados paso a paso

Muestra gratuita · primeras 6 de 191 páginas

Juan Carlos del Río
Asignatura de 4.º del Grado en Matemáticas (UNED)
porqueasi.com · noviembre de 2026

Material de estudio elaborado de forma independiente a partir del temario. No es material oficial de la universidad ni está avalado por ella. Elaborado por el autor con ayuda de herramientas de inteligencia artificial; si encuentras un error, escribe a hola@porqueasi.com.

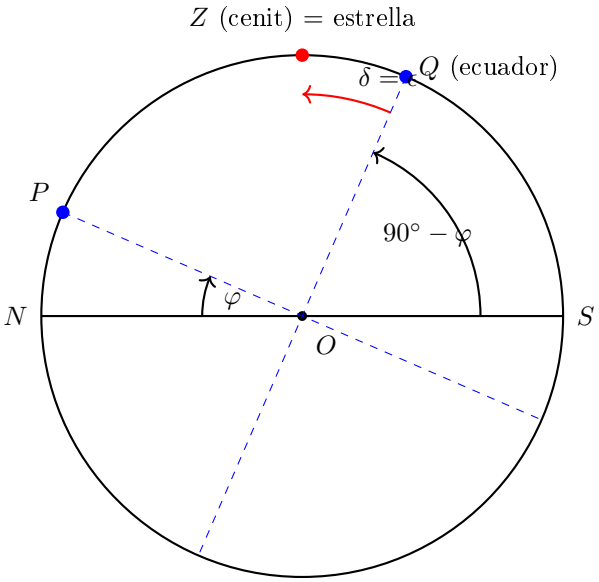
Capítulo 1

Ejercicios de: Febrero 2014 - primera semana (A14F1)

Problema 1

Enunciado. Halle la altura de una estrella de declinación $\delta = \epsilon$ en el momento de su culminación superior, para un observador situado en un punto del trópico de Cáncer. **(2 puntos)**

Idea clave. Todo se juega en el *meridiano del lugar*: en la culminación superior la estrella, el cenit y el polo están sobre ese mismo círculo máximo, de modo que el problema esférico degenera en una simple suma y resta de arcos sobre una circunferencia. No hace falta trigonometría esférica.



Meridiano del lugar visto de canto. En el trópico de Cáncer $\varphi = \epsilon$, y como la estrella tiene $\delta = \epsilon$ su culminación cae justo en el cenit.

Solución. La latitud del trópico de Cáncer es, por definición, igual a la oblicuidad de la eclíptica:

$$\varphi = \epsilon \simeq 23°26'.$$

La altura de culminación superior de un astro se obtiene del esquema anterior. El ecuador corta al meridiano a una altura $90° - \varphi$ sobre el punto cardinal Sur, y la estrella está δ por encima del ecuador, luego

$$h_{\max} = 90° - \varphi + \delta.$$

Esta expresión vale mientras el resultado no pase de 90°; en general se escribe de forma compacta

$$\boxed{h_{\max} = 90° - |\varphi - \delta|}$$

que ya incorpora automáticamente el caso en que la estrella culmine al norte del cenit.

Sustituyendo $\varphi = \epsilon$ y $\delta = \epsilon$:

$$h_{\max} = 90^\circ - |\epsilon - \epsilon| = 90^\circ.$$

Interpretación física. La estrella culmina *en el cenit*: pasa exactamente por la vertical del observador. Esto no es una casualidad del problema, sino la definición misma del trópico de Cáncer: es el paralelo terrestre en el que el Sol, cuando alcanza su declinación máxima $\delta = \epsilon$ (solsticio de junio), se ve en el cenit al mediodía. Cualquier astro con $\delta = \epsilon$ hace lo mismo.

Truco de examen. Memoriza una sola regla en lugar de tres casos:

$$h_{\max} = 90^\circ - |\varphi - \delta|, \qquad h_{\min} = |\varphi + \delta| - 90^\circ,$$

la segunda solo tiene sentido (astro circumpolar) si $|\varphi + \delta| > 90^\circ$. Con ellas resuelves de memoria todos los problemas de culminación.

Errores comunes.

- Escribir $h = 90^\circ - \varphi + \delta$ sin comprobar el signo de $\varphi - \delta$: si $\delta > \varphi$ la estrella culmina al *norte* del cenit y la fórmula sin valor absoluto da alturas mayores de 90°, que no existen.
- Confundir el trópico de Cáncer ($\varphi = +\epsilon$) con el círculo polar ártico ($\varphi = 90^\circ - \epsilon$).

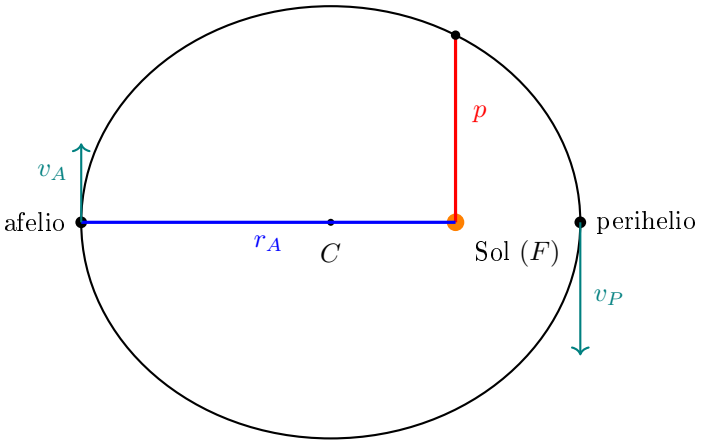
Problema 2

Enunciado. Sean r_A la distancia de un planeta al Sol en el afelio y p el *semilatus rectum* de la órbita.

a) Demuestre que la excentricidad satisface la relación $e = \dfrac{r_A - p}{r_A}$.

b) Calcule cuántas veces es mayor la velocidad en el perihelio, v_P, que en el afelio, v_A, del asteroide Melpómene sabiendo que $p = 2.1866$ UA y $r_A = 2.7967$ UA. **(2 puntos)**

Idea clave. Dos herramientas y nada más: la ecuación polar de la cónica (para el apartado a) y la conservación del momento angular (para el b). En los ápsides el radio vector y la velocidad son *perpendiculares*, y ahí el momento angular se escribe simplemente como producto $r\,v$.



El semilatus rectum p es la ordenada de la órbita sobre el foco ($f = 90^\circ$). En los dos ápsides la velocidad es perpendicular al radio vector: ahí $L = r\,v$.

a) Demostración. La ecuación polar de la elipse con foco en el Sol es

$$r = \frac{p}{1 + e\cos f}, \qquad p = a(1 - e^2),$$

donde f es la anomalía verdadera. El afelio corresponde a $f = 180^\circ$, luego $\cos f = -1$ y

$$r_A = \frac{p}{1 - e} \implies p = r_A(1 - e) = r_A - e\,r_A.$$

Despejando la excentricidad:

$$e\,r_A = r_A - p \implies \boxed{e = \frac{r_A - p}{r_A} = 1 - \frac{p}{r_A}}$$

como se pedía.

b) Cociente de velocidades. El momento angular por unidad de masa $L = |\vec{r}\times\vec{v}|$ se conserva (fuerza central). En perihelio y afelio $\vec{r}\perp\vec{v}$, de modo que

$$L = r_P\,v_P = r_A\,v_A \implies \frac{v_P}{v_A} = \frac{r_A}{r_P}.$$

Como $r_P = a(1-e)$ y $r_A = a(1+e)$:

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{1+e}{1-e}.$$

Con los datos, primero la excentricidad:

$$e = 1 - \frac{2.1866}{2.7967} = 1 - 0.78185004 = 0.21814996.$$

Y entonces

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{1.21814996}{0.78185004} = 1.55804.$$

Truco de examen (ahorra la mitad de las cuentas). No hace falta calcular e. Basta observar que $1-e = p/r_A$ y por tanto $1+e = 2 - p/r_A = (2r_A - p)/r_A$, con lo que

$$\boxed{\frac{v_P}{v_A} = \frac{2r_A - p}{p}}$$

Sustituyendo directamente:

$$\frac{v_P}{v_A} = \frac{2(2.7967) - 2.1866}{2.1866} = \frac{3.4068}{2.1866} = 1.55804.$$

Una sola división en lugar de tres operaciones encadenadas, y sin arrastrar errores de redondeo en e.

Resultado. $e = 0.218$ y $v_P/v_A = 1.558$: en el perihelio Melpómene va un 55.8 % más deprisa que en el afelio.

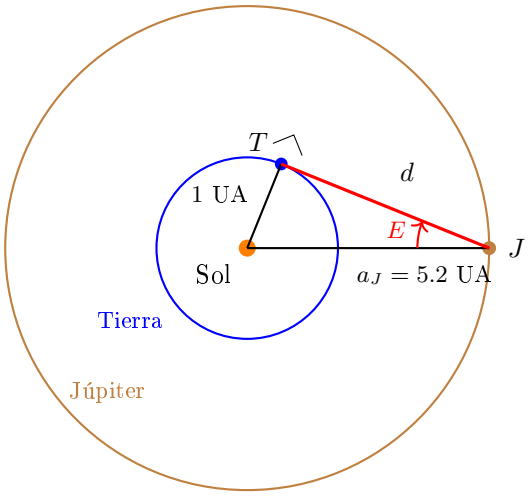
Errores comunes.

- Usar la conservación de la energía en lugar del momento angular: funciona, pero obliga a conocer $GM_\odot$ y a, y es mucho más largo.
- Aplicar $L = r\,v$ en un punto cualquiera de la órbita. Solo es válido en los ápsides, donde el ángulo entre $\vec{r}$ y $\vec{v}$ vale 90°.
- Confundir p (semilatus rectum) con $2p$ (latus rectum completo) o con el semieje menor b. Recuerda: $p = b^2/a$.

Problema 3

Enunciado. Suponemos circulares y coplanarias las órbitas de la Tierra y de Júpiter. Halle la máxima elongación de la Tierra, vista desde Júpiter, sabiendo que el semieje de la órbita de Júpiter es 5.2 UA y la UA es 1.49598×10^8 km. ¿Qué distancia hay en ese momento entre ambos planetas? **(3 puntos)**

Idea clave. Desde Júpiter, la Tierra es un planeta *interior*. Un planeta interior nunca se aleja mucho del Sol en el cielo: su separación angular es máxima cuando la visual al planeta es *tangente* a su órbita, y entonces el triángulo Sol–Tierra–Júpiter es *rectángulo en la Tierra*. Toda la dificultad del problema se reduce a reconocer ese ángulo recto.



Máxima elongación: la visual JT es tangente a la órbita terrestre, luego $\widehat{STJ} = 90°$. El ángulo E en Júpiter es la elongación buscada.

Solución. En el triángulo rectángulo de vértices Sol, T y J, con el ángulo recto en T:

$$\sin E_{\max} = \frac{a_\oplus}{a_J} = \frac{1}{5.2} = 0.19230769,$$

$$E_{\max} = \arcsin(0.19230769) = 11.0875° = 11° 05' 15''.$$

La distancia entre ambos planetas es el cateto restante, por el teorema de Pitágoras:

$$d = \sqrt{a_J^2 - a_\oplus^2} = \sqrt{5.2^2 - 1^2} = \sqrt{26.04} = 5.10294 \text{ UA},$$

$$d = 5.10294 \times 1.49598 \times 10^8 = 7.6339 \times 10^8 \text{ km}.$$

Comentario. Visto desde Júpiter, la Tierra nunca se separa del Sol más de 11°: sería siempre un *lucero del alba o del ocaso*, como Mercurio para nosotros (cuya elongación máxima es $\arcsin(0.387) = 22.8°$). Comprueba la coherencia: cuanto más pequeño es el cociente de radios, menor la elongación máxima.

Truco de examen. Identifica siempre quién es *interior* respecto a quién. El planeta interior es el que tiene elongación acotada, y la fórmula es

$$\sin E_{\max} = \frac{a_{\text{interior}}}{a_{\text{exterior}}}, \qquad d = \sqrt{a_{\text{ext}}^2 - a_{\text{int}}^2}.$$

Aquí el observador está en el exterior (Júpiter) y el observado en el interior (Tierra), que es la situación inversa a la habitual en los libros; la fórmula no cambia.

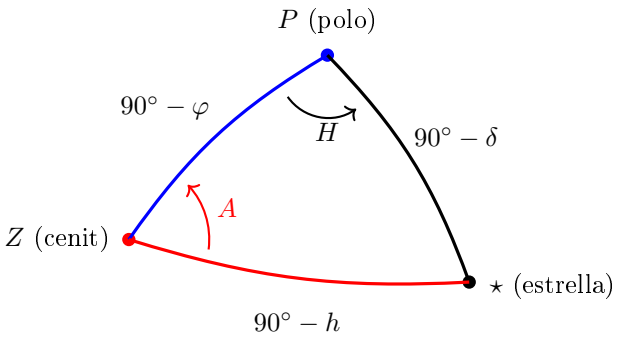
Errores comunes.

- Colocar el ángulo recto en el Sol o en Júpiter. El vértice recto está siempre en el *planeta interior*.
- Calcular d con el teorema del coseno sin darse cuenta de que el triángulo ya es rectángulo, perdiendo tiempo.
- Olvidar convertir a kilómetros cuando el enunciado da explícitamente el valor de la UA: ese dato está puesto ahí precisamente para que se use.

Problema 4

Enunciado. Sea la estrella Aldebarán (α-Tauri) de coordenadas $\alpha = 4^h\,36^m\,43^s$ y $\delta = 16°\,32'\,10''$, que culmina en Lleida, cuya longitud es $0°\,37'\,40''$ E, en un determinado momento. Calcule el ángulo horario, la altura y el azimut de Aldebarán en ese instante observada desde Zamora, de latitud $41°\,30'\,00''$ N y longitud $5°\,45'\,13''$ W. **(3 puntos)**

Idea clave. Dos pasos independientes. Primero, un argumento de *tiempo sidéreo* que solo usa la diferencia de longitudes: el ángulo horario en dos lugares distintos difiere exactamente en su diferencia de longitud geográfica. Segundo, el *triángulo de posición* PZE para pasar de (H, δ) a (A, h).



Triángulo de posición: el ángulo en el polo es el horario H y el ángulo en el cenit da el azimut. Los tres lados son complementos de φ, δ y h.

Paso 1: el ángulo horario en Zamora. Que la estrella *culmine en Lleida* significa que allí su ángulo horario es nulo, y por tanto el tiempo sidéreo local de Lleida coincide con la ascensión recta:

$$H_L = 0 \implies \theta_L = \alpha.$$

El tiempo sidéreo local se relaciona con el de Greenwich por $\theta = \theta_G + \lambda$ (longitudes positivas al Este). Restando las dos expresiones, θ_G desaparece:

$$\theta_Z = \theta_L - \lambda_L + \lambda_Z = \alpha + (\lambda_Z - \lambda_L).$$

Por definición $H = \theta - \alpha$, luego

$$\boxed{H_Z = \lambda_Z - \lambda_L}$$

es decir: *el ángulo horario en Zamora es simplemente la diferencia de longitudes.* Con

$$\lambda_L = +0^\circ\,37'\,40'' = +0.62777778^\circ, \qquad \lambda_Z = -5^\circ\,45'\,13'' = -5.75361111^\circ,$$

$$H_Z = -5.75361111^\circ - 0.62777778^\circ = -6.38138889^\circ = -6^\circ\,22'\,53''.$$

En unidades de tiempo, dividiendo por 15:

$$H_Z = -0^h\,25^m\,31.5^s.$$

El signo negativo indica que la estrella está *al este* del meridiano de Zamora: todavía le faltan 25 minutos y medio para culminar allí, lo cual es coherente, porque Zamora está al oeste de Lleida.

Paso 2: altura. Con $\varphi = 41^\circ\,30'\,00'' = 41.5^\circ$ y $\delta = 16^\circ\,32'\,10'' = 16.53611111^\circ$, la primera fórmula fundamental del triángulo de posición (teorema del coseno esférico aplicado al lado $90^\circ - h$) da

$$\sin h = \sin\varphi\,\sin\delta + \cos\varphi\,\cos\delta\,\cos H.$$

Numéricamente:

$$\sin h = (0.66262005)(0.28454558) + (0.74895638)(0.95865848)(0.99380585)$$

$$\sin h = 0.18854659 + 0.71357448 = 0.90212107,$$

$$h = \arcsin(0.90212107) = 64.4389^\circ = 64^\circ\,26'\,20''.$$

Paso 3: azimut. Conviene usar las dos ecuaciones acopladas y una arcotangente de dos argumentos, que resuelve el cuadrante sin ambigüedad:

$$\cos h\,\sin A = \cos\delta\,\sin H, \qquad \cos h\,\cos A = -\cos\varphi\,\sin\delta + \sin\varphi\,\cos\delta\,\cos H.$$

Con los valores anteriores:

$$\cos h\,\sin A = (0.95865848)(-0.11113887) = -0.10654$$

$$\cos h\,\cos A = -(0.74895638)(0.28454558) + (0.66262005)(0.95865848)(0.99380585)$$

$$\cos h\,\cos A = -0.21311 + 0.63131 = 0.41820$$